I. S. F. A.

2005-2006

Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Calculatrice autorisée

OPTION B

Réassurance proportionnelle et non proportionnelle

Ce sujet aborde de manière très simplifiée des questions de probabilités inspirées de problèmes rencontrés en assurance. Néanmoins, aucune connaissance en assurance n'est nécessaire, et toutes les questions se traitent avec les outils du programme.

1 Notations, définitions et introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé.

Monsieur Toulmonde a assuré ses champs contre les dégâts causés par les sauterelles auprès de la compagnie d'assurances Plèdégypt. À ce titre, il a payé une prime p fixée pour l'année 2005, et, en contrepartie, Plèdégypt s'est engagée à rembourser tous les dommages causés par les sauterelles sur ses champs en 2005. Notons S le coût total (en euros) de tous les dégâts causés par les sauterelles dans le champ de M. Toulmonde pendant l'année 2005 : c'est aussi le montant des remboursements payés par Plèdégypt à M. Toulmonde. Comme la valeur de S n'est pas prévisible au début de l'année 2005, on considère que S est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. On supposera dans toute la suite que S admet une densité f_S sur $\mathbb{R}_+$, et que $E(S^2) < +\infty$.

Pour assurer sa viabilité, la compagnie Plèdégypt a fixé la prime p à une valeur qu'elle espère plus grande que la valeur moyenne des remboursements : on peut poser

$$p = (1 + \rho_a)E(S),$$

où ρ_a est un réel positif appelé chargement de sécurité.

La compagnie Plèdégypt ne souhaite pas supporter à elle seule le risque qu'elle couvre par son contrat avec M. Toulmonde. Elle fait donc appel à une société de réassurance (sorte d'assureur de l'assureur), Bzz Re, à qui elle va transférer une partie de ce risque. Contre le paiement par Plèdégypt d'une somme déterministe p_r, la société de réassurance Bzz Re s'engage à payer à Plèdégypt une partie $S_r \leq S$ des remboursements effectués à M. Toulmonde. Comme pour p, on peut introduire le chargement de sécurité ρ_r, tel que

$$p_r = (1 + \rho_r)E(S_r)\,.$$

La partie restant à la charge de Plèdégypt sera notée $S_a = S - S_r$. On notera F_a la fonction de répartition de S_a, le coût supporté par l'assureur Plèdégypt, et F_r celle de S_r, le coût supporté par le réassureur Bzz Re.

En général, S_r est une fonction de S ; l'objet de cet exercice est l'étude de plusieurs cas particuliers, correspondant à plusieurs « traités » de réassurance courants.

Pour Plèdégypt, le résultat financier global du contrat avec M. Toulmonde, et sa réassurance, pour l'année 2005, s'élève à

$$G = (1 + \rho_a)E(S) - S + S_r - (1 + \rho_r)E(S_r)\,,$$

ce résultat étant positif si Plèdégypt a été bénéficiaire sur ces contrats, et négatif sinon.

Pour deux variables aléatoires non presque sûrement constantes et de carré intégrable, on rappelle la définition du coefficient de corrélation de X et de Y par

$$\text{corr }(X, Y) = \frac{\text{Cov }(X, Y)}{\sqrt{\text{Var }(X)}\sqrt{\text{Var }(Y)}},$$

où

$$\text{Cov }(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

est la covariance de X et de Y, et

$$\text{Var }(X) = E\left(X^2\right) - (EX)^2$$

est la variance de X.

Le but de Plèdégypt est d'essayer de maximiser son gain espéré tout en réduisant son risque. Une façon simpliste de représenter les préférences de l'assureur Plèdégypt est de supposer qu'il cherche à maximiser

$$E(G) - \delta \text{ Var }(G)$$

ou

$$E(G) - \delta\sqrt{\text{Var }(G)},$$

pour avoir quelque chose d'homogène, où $\delta > 0$ est fixé. Le premier terme, $E(G)$, représente le profit moyen, et le second, $-\delta$ Var (G) ou $-\delta\sqrt{\text{Var }(G)}$, représente une pénalité due à la variablité de ce profit.

2 Préliminaire

1. Soit X et X' deux variables aléatoires de carré intégrable (c'est-à-dire telles que $E(X^2)$ et $E(X'^2)$ sont finis) et non presque sûrement constantes. Pour $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ réels, exprimer

$$\text{corr}\,(\lambda X + \mu, \lambda' X' + \mu')$$

en fonction de

$$\text{corr}\,(X, X').$$

3 Traité quote-part

Dans un traité de réassurance de type quote-part, la répartition du coût entre l'assureur Plèdégypt et le réassureur Bzz Re est proportionnelle. Soit $\alpha \in [0,1]$ la proportion de risque cédée par Plèdégypt au réassureur. On suppose donc

$$S_r = \alpha S$$

et

$$S_a = (1-\alpha)S.$$

2. Exprimer $F_a(x)$ et $F_r(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de f_S (Rappelons que F_a et F_r sont les fonctions de répartition respectives de S_a et S_r).
3. Déterminer l'espérance et la variance de S_a et de S_r en fonction de $E(S)$ et $\text{Var}\,(S)$.
4. Calculer $\text{corr}\,(S_a, S_r)$.
5. Déterminer le gain espéré de Plèdégypt $E(G)$ en fonction de $E(S)$, α, ρ_a et ρ_r.
6. Déterminer la variance $\text{Var}\,(G)$ du gain de Plèdégypt en fonction de α et de $\text{Var}\,S$.
7. A quelle condition (sur $E(S)$, $\text{Var}\,(S)$ et ρ_r) la valeur du niveau de réassurance α qui maximise pour Plèdégypt $E(G) - \delta\,\text{Var}\,(G)$ est-elle nulle ? Interpréter ce résultat.
8. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, déterminer la valeur du niveau de réassurance α qui maximise pour Plèdégypt $E(G) - \delta\,\text{Var}\,(G)$.

Dans le reste du problème, on cherchera à maximiser $E(G) - \delta\sqrt{\text{Var}\,(G)}$.

4 Traité excédent de sinistre (excess-of-loss)

Contrairement au traité précédent, dans ce type de traité, la répartition du coût entre l'assureur Plèdégypt et le réassureur Bzz Re est non proportionnelle. Plèdégypt prend en charge le coût du sinistre jusqu'à un niveau maximal $b > 0$. Bzz Re prend en charge la partie du coût qui excède éventuellement b. Par exemple, si $b = 1000$ et $S = 3000$, alors Plèdégypt paiera 1000 et le réassureur Bzz Re 2000. Si le coût total était $800 < 1000$, alors l'assureur Plèdégypt paierait la totalité des 800, et Bzz Re paierait 0. b est appelé le niveau de rétention. On suppose donc dans cette partie que

$$S_a = \min(S, b)$$

et que

$$S_r = (S - b)_+$$

avec la notation $x_+ = \max(x, 0)$.
On rappelle que pour $A \in \mathcal{F}$, la fonction caractéristique de l'événement A, notée 1_A, est la variable aléatoire valant 1 sur A et 0 sur son complémentaire.

9. Exprimer $F_a(x)$ et $F_r(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de f_S et de b.
10. Exprimer S_a et S_r à l'aide de b et des variables aléatoires S, $1_{\{S<b\}}$ et $1_{\{S \geq b\}}$.
11. Déterminer l'espérance et la variance de S_a et de S_r en fonction de f_S et de b.
12. Calculer $\operatorname{corr}(S_a, S_r)$.
13. Déterminer le gain espéré de Plèdégypt $E(G)$.

Pour le reste de cete partie, on suppose que l'assureur a le choix entre un traité quote-part avec $\alpha^A = 0.53$ (traité A), un traité excédent de sinistre avec $b^B = 1000$ et $\rho_r^B = 0.2$ (traité B), et un traité excédent de sinistre avec $b^C = 600$ et $\rho_r^C = 0.3$ (traité C).

14. 1er cas : On suppose que S suit une loi exponentielle d'espérance $\lambda > 0$ (donc de paramètre $1/\lambda$).
    (a) Calculer
    $$P(S_r > x + t | S_r > x)$$
    pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Que remarquez vous ? Comment s'appelle la propriété de la loi exponentielle correspondante ?

(b) Déterminer la variance de G en fonction de λ, ρ_r et b pour un traité excédent de sinistre de niveau de rétention b.

(c) Application numérique : $\lambda = 1000$, $\rho_a = 0.2$ et $\delta = 10$. Afin de maximiser

$$E(G) - \delta\sqrt{\text{Var }(G)},$$

quel traité (A, B ou C) l'assureur Plèdégypt choisirait-il avec ces paramètres ?

15. 2ème cas : On suppose que S suit une loi log-normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Cela signifie que $S \sim e^Z$ ($\sim$ désigne l'égalité en loi), où Z suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. On rappelle ici la densité $\psi_{\mu,\sigma^2}(x)$ d'une loi normale de paramètres μ et σ^2 au point $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

(a) Déterminer la densité, l'espérance et la variance de S.

(b) Déterminer la variance de G en fonction de f_S, ρ_r et b pour un traité excédent de sinistre de niveau de rétention b.

(c) Déterminer μ et σ de façon à avoir $E(S) = \lambda$ et $\text{Var }(S) = \lambda^2$.

(d) Application numérique : $\lambda = 1000$, μ et σ déterminés comme à la question précédente, $\rho_a = 0.2$ et $\delta = 10$. Afin de maximiser

$$E(G) - \delta\sqrt{\text{Var }(G)},$$

quel traité (A, B ou C) l'assureur Plèdégypt choisirait-il avec ces paramètres ? (Utiliser la table de valeurs en annexe en dernière page.)

16. Donner une interprétation de la différence de choix de Plèdégypt dans ces deux cas de figure.

5 Traité mixte

Dans ce type de traité, la répartition du coût entre l'assureur Plèdégypt et le réassureur Bzz Re est non proportionnelle et combine les deux aspects précédents. Plèdégypt prend en charge le coût du sinistre jusqu'à un niveau maximal $b > 0$, puis au delà une proportion $1 - \alpha$ de l'excès. Bzz Re prend en charge une proportion α de la partie du coût qui excède éventuellement b.

Par exemple, si $b = 1000$, $\alpha = 0.25$ et $S = 3000$, alors l'assureur Plèdégypt paiera

$$1000 + (3000 - 1000) \times (1 - 0.25)$$

et le réassureur Bzz Re

$$(3000 - 1000) \times 0.25.$$

Si le coût total était $800 < 1000$, alors Plèdégypt paierait la totalité des 800, et Bzz Re paierait 0. On suppose donc dans cette partie que

$$S_a = \min(S, b) + (1 - \alpha)(S - b)_+$$

et que

$$S_r = \alpha(S - b)_+.$$

17. Exprimer $F_a(x)$ et $F_r(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en fonction de f_S, α et b.
18. Exprimer S_a et S_r à l'aide de b, α et des variables aléatoires S, $1_{\{S<b\}}$ et $1_{\{S \geq b\}}$.
19. Déterminer l'espérance et la variance de S_a et de S_r en fonction de f_S et de b.
20. Calculer $\operatorname{corr}(S_a, S_r)$.
21. Déterminer le gain espéré de l'assureur Plèdégypt $E(G)$.

Pour le reste de cet exercice, on suppose que Plèdégypt a le choix entre les trois traités A,B et C précédemment décrits, et un quatrième traité de type mixte (traité D, donné par $\alpha^D = 0.87$, $b^D = 500$ et $\rho_r^D = 0.1$).

22. 1er cas : On suppose que S suit une loi exponentielle d'espérance $\lambda > 0$ (donc de paramètre $1/\lambda$).
    (a) Déterminer la variance de G en fonction de λ, ρ_r, α et b.
    (b) Application numérique : $\lambda = 1000$, $\rho_a = 0.2$ et $\delta = 10$. Afin de maximiser
    $$E(G) - \delta\sqrt{\operatorname{Var}(G)},$$
    quel traité (A, B, C ou D) Plèdégypt choisirait-il avec ces paramètres ?
23. 2ème cas : On suppose que S suit une loi log-normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Cela signifie que $S \sim e^Z$ ($\sim$ désigne l'égalité en loi), où Z suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2.

(a) Déterminer la variance de G en fonction de f_S, ρ_r, α et b.

(b) Application numérique : $\lambda = 1000$, μ et σ tels que $E(S) = \lambda$ et $\mathrm{Var}\ (S) = \lambda^2$ déterminés dans la partie précédente, $\rho_a = 0.2$, $\delta = 10$. Afin de maximiser

$$E(G) - \delta\sqrt{\mathrm{Var}\ (G)},$$

quel traité (A, B, C ou D) Plèdégypt choisirait-il avec ces paramètres ? (Utiliser la table de valeurs en annexe en dernière page.)

24. Comparer et interpréter les valeurs de

$$E(G) - \delta\sqrt{\mathrm{Var}\ (G)}$$

pour le traité D pour les deux lois considérées.

Expression	Valeur pour $b = 500$	pour $b = 600$	pour $b = 1000$
$\int_0^b f_\lambda(x)dx$	0.3386	0.4218	0.6614
$\int_0^b xf_\lambda(x)dx$	105.86	151.54	338.60
$\int_0^b x^2 f_\lambda(x)dx$	37398.54	62547.29	211726.56

Tab. 1 –
Valeurs arrondies des expressions pour différentes valeurs de b, où f_λ est la densité de la loi log-normale de paramètres ajustés de manière à avoir une loi d'espérance $\lambda = 1000$ et de variance λ^2.